FOR EVALUATOR'S USE ONLY

Sub. Code : **20**

RAS(M)2012

Optional Paper

Mathematics : Paper – I

Time : 3 Hours / Maximum Marks : 200 / Total Pages : 32

Evaluation Table (For Evaluator's Use Only)

PART-A				PART-B				PART-C			
QN	E-1	E-2	AC	QN	E-1	E-2	AC	QN	E-1	E-2	AC
1				21				33			
2				22				34			
3				23				35			
4				24				36			
5				25				37			
6				26				38			
7				27				39			
8				28							
9				29							
10				30							
11				31							
12				32							
13											
14											
15											
16											
17											
18											
19											
20											
Total											
Evaluator's Sign											

Grand Total	
PART-A	
PART-B	
PART-C	
Total	
(–) Marks	
Final Total	

Marks in Words

Remarks of Evaluator/Chief Evaluator

Remarks of Scrutiniser

16 / 20-I

BLANK PAGE

PART – A

भाग – अ

Marks : 40

अंक : 40

Note : Attempt all the **twenty** questions. Each question carries **2** marks. Answer should not exceed **15** words.

नोट : समस्त २० प्रश्नों के उत्तर दीजिये। प्रत्येक प्रश्न के लिये २ अंक निर्धारित है। उत्तर १५ शब्दों से अधिक नहीं होना चाहिये।

1 If t is a linear transformation from a vector space $V(F)$ to a vector space $V'(F)$, then show that $t(v) = -t(v) \forall v \in V$.

यदि t सदिश समष्टि $V(F)$ से सदिश समष्टि $V'(F)$, पर एक रैखिक रूपान्तरण है, तो प्रदर्शित कीजिये कि $t(v) = -t(v) \forall v \in V$.

2 Show that $\{1, i\}$ is a basis for the field C of complex numbers, considered as vector space over the field R of real numbers, where $i^2 = -1$.

प्रदर्शित कीजिये कि संमिश्र संख्या के क्षेत्र C, जो वास्तविक संख्या के क्षेत्र R पर एक सदिश समष्टि है, के लिए $\{1, i\}$ एक आधार है, जहाँ $i^2 = -1$ है।

3 Let $t: R^2 \to R^2$ be a linear transformation defined by :

यदि $t: R^2 \to R^2$ एक रैखिक रूपान्तरण है जो निम्न प्रकार से परिभाषित है :

$t(x, y) = (x+y, x-y) \ \forall \ (x, y) \in R^2$.

Then find the matrix of t with respect to basis $B = \{(1,0), (0,1)\}$ of R^2.

तो R^2 के आधार $B = \{(1,0), (0,1)\}$ के सापेक्ष t की मैट्रिक्स ज्ञात कीजिये।

4 Show that every subgroup of an abelian group is normal subgroup.

प्रदर्शित कीजिये कि एक आबेली समूह का प्रत्येक उप–समूह एक विशिष्ट उप–समूह होता है।

5 Write the conditions for a ring to be an integral domain.

एक वलय के पूर्णांकीय प्रान्त होने की शर्तें लिखिए।

6 Define field and give an example of a finite field.
क्षेत्र की परिभाषा दीजिये और परिमित क्षेत्र का एक उदाहरण दीजियें।

7 Find the value of $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$.
$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$ का मान ज्ञात कीजिये।

8 Evaluate $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$ का मान ज्ञात कीजिये।

9 Find the radius of curvature at the point (s, ψ) on the curve $s = a\log(\sec\psi + \tan\psi)$.

वक्र $s = a\log(\sec\psi + \tan\psi)$ के बिन्दु (s, ψ) पर वक्रता–त्रिज्या ज्ञात कीजिये।

10 Evaluate $\int_{-2}^{1} |x|\, dx$.

$\int_{-2}^{1} |x|\, dx$ का मान ज्ञात कीजिये।

11 Prove that the series

सिद्ध कीजिए की श्रेणी

$$1 + \frac{2^p}{\lfloor 2} + \frac{3^p}{\lfloor 3} + \frac{4^p}{\lfloor 4} + \ldots$$

is convergent for all values of p.

p के सभी मानों के लिए अभिसारी है।

12 Prove that the set Q of rational numbers is not an open set.
सिद्ध कीजिये कि परिमेय संख्याओं का समुच्चय Q एक विवृत्त समुच्चय नहीं है।

13 Let f be a real valued bounded function defined on closed interval $[a, b]$. Then for any partition P of $[a, b]$, prove that

$L(f,P) \leq U(f,P)$.

यदि f संवृत्त अन्तराल $[a, b]$ पर वास्तविक मान परिबद्ध फलन है, तो $[a, b]$ के किसी विभाजन P के लिये सिद्ध कीजिये कि

$L(f,P) \leq U(f,P)$.

14 Define uniform convergence of sequence of functions.
फलनों के अनुक्रम के लिए एक समान अभिसरण की परिभाषा दीजिये।

15 Write the equation of right circular cylinder whose axis is x-axis and radius is r.
एक लम्बवृत्तीय बेलन का समीकरण लिखिए जिसका अक्ष x–अक्ष है तथा त्रिज्या r है।

16 If $x-1=0$ is the directrix of the parabola. $y^2-kx+8=0$, then find the values of k.

यदि $x-1=0$ परवलय $y^2-kx+8=0$ की नियता है, तो k का मान, ज्ञात कीजिये।

17 Prove that the lines
$x=ay+b, z=cy+d$ and $x=a'y+b', z=c'y+d'$ are perpendicular if $aa'+cc'=-1$.
सिद्ध कीजिये कि रेखाएँ $x=ay+b, z=cy+d$ और $x=a'y+b', z=c'y+d'$ लम्बवत हैं यदि $aa'+cc'=-1$.

18 Show that the function $f(z)=x^2y-iy$ is not analytic any where.

प्रदर्शित कीजिए कि फलन $f(z)=x^2y-iy$ कहीं भी विश्लेषिक नहीं है।

19 Find the radius of convergence of the power series.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{-n}}{\left(1+in^2\right)}z^n.$$

घात श्रेणी $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{-n}}{\left(1+in^2\right)}z^n$ की अभिसरण त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

20 Find the nature of singularity of function

$$f(z)=\frac{\sin z}{(z-\pi)^2} \text{ at } z=\pi$$

फलन $f(z)=\frac{\sin z}{(z-\pi)^2}$ की $z=\pi$ पर विचित्रता की प्रकृति ज्ञात कीजिए।

PART – B

भाग – ब

Marks : 60

अंक : 60

Note : Attempt all the **twelve** questions. Each question carries 5 marks. Answer should not exceed 50 words.

नोट : समस्त १२ प्रश्नों के उत्तर दीजिये। प्रत्येक प्रश्न के ५ अंक निर्धारित हैं। उत्तर ५० शब्दों से अधिक नहीं होना चाहिए।

21 If $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ be a basis of a vector space $V(F)$, then prove that each element of V can be expressed uniquely as a linear combination of elements of B, where F is a field.

यदि $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ किसी सदिश समष्टि $V(F)$ का आधार है, तो सिद्ध कीजिये कि V का प्रत्येक अवयव समुच्चय B के अवयवों के एकघात संचय के रूप में अद्वितीय प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ F एक क्षेत्र है।

22 Prove that :

सिद्ध करो कि :

$$\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$$

23 Let $(Z, +)$ be the additive group of integers and $H = 3Z = \{3x | x \in Z\}$ be its subgroup, then find quotient group $Z|H$.

माना $(Z, +)$, पूर्णांकों का द्विचर संक्रिया योग के लिए समूह है और $H = 3Z = \{3x | x \in Z\}$ इसका एक उपसमूह है, तो खण्ड समूह $Z|H$ ज्ञात कीजिये।

24 Prove that a field has no proper ideal.

सिद्ध कीजिए कि एक–क्षेत्र की कोई भी उचित गुणजावली नहीं होती है।

25 Change the order of integration in the following integral :

निम्न समाकल में समाकलन का क्रम परिवर्तित कीजिये :

$$\int_{0}^{4a} \int_{\frac{x^2}{4a}}^{2\sqrt{ax}} f(x,y)\,dx\,dy$$

26 Evaluate $\int_C \frac{e^{3z}}{(z-\pi i)} dz$, where C is a circle $|z-1| = 4$

$\int_C \frac{e^{3z}}{(z-\pi i)} dz$ का मान ज्ञात कीजिए। जहाँ C, $|z-1| = 4$ एक वृत्त है।

27 Prove that every finite subset of the set R of real numbers is compact.
सिद्ध कीजिये कि वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R का प्रत्येक परिमित उपसमुच्चय संहत होता है।

28 If $u=\tan^{-1}\left(\frac{x^3+y^3}{x-y}\right)$, then find the value of $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}$.

यदि $u=\tan^{-1}\left(\frac{x^3+y^3}{x-y}\right)$ हो, तो $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}$ का मान ज्ञात कीजिए।

29 From a point P tangents are drawn to the parabola $y^2 = 4ax$. If the chord of contact of these tangents touches the rectangular hyperbola $x^2 - y^2 = a^2$, then prove that the locus of P is

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4a^2} = 1.$$

किसी बिन्दु P से परवलय $y^2 = 4ax$ पर स्पर्श रेखाएँ खींची गयी हैं। यदि इन स्पर्श रेखाओं की स्पर्श जीवा समकोणीय अतिपरवलय $x^2 - y^2 = a^2$ को स्पर्श करती है, तो सिद्ध कीजिये कि बिन्दु P का बिन्दुपथ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4a^2} = 1$$ है।

30 Find the equation of sphere which passes through the point (α, β, γ) and the circle

$x^2 + y^2 = a^2;\ z = 0.$

बिन्दु (α, β, γ) और वृत्त $x^2 + y^2 = a^2;\ z = 0$ से होकर गुजरने वाले गोले का समीकरण ज्ञात कीजिये।

31 Find the envelope of the family of straight lines $x/a + y/b = 1$, where $ab = 4$.

सरल रेखाओं के कुल, $x/a + y/b = 1$ जहाँ $ab = 4$ है, का अन्वालोप ज्ञात कीजिये।

32 Find the Taylor's series expansion of $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$ in the powers of $(z-2)$.

$(z-2)$ की घातों में फलन $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$ का टेलर श्रेणी प्रसार ज्ञात कीजिये।

PART – C

भाग – स

Marks : 100

अंक : 100

Note : Attempt any **five** questions. Each question carries **20** marks. Answer should not exceed **200** words.

नोट : कोई भी ५ प्रश्न कीजिये। प्रत्येक प्रश्न के लिए २० अंक निर्धारित है। उत्तर २०० शब्दों से अधिक नहीं होना चाहिए।

33 Determine the eigenvalues and the corresponding eigenvectors of the matrix A, where :
मैट्रिक्स A के लिए अभिलाक्षणिक मूल तथा संगत अभिलाक्षणिक सदिश ज्ञात कीजिये, जहाँ :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -7 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

34 Define prime ideal and prove that an ideal I of a commutative ring R with unity is prime if and only if R/I is an integral domain.

अभाज्य गुणजावली की परिभाषा दीजिये तथा सिद्ध कीजिये कि किसी क्रमविनिमेय तत्समकी वलय R की एक गुणजावली I अभाज्य गुणजावली है यदि और केवल यदि R/I एक पूर्णांकीय प्रान्त है।

35 Find a cylinder of greatest volume. Which can be inscribed in a cone.

एक शंकु में उत्कीर्ण अधिकतम आयतन वाले बेलन को ज्ञात करिए।

36 (a) Show that the eight points of intersection of the curve $xy\left(x^2-y^2\right)+x^2+y^2-a^2=0$ and its asymptotes lie on a circle $x^2+y^2=a^2$.

प्रदर्शित कीजिए कि वक्र $xy\left(x^2-y^2\right)+x^2+y^2-a^2=0$ तथा इसकी अनन्तस्पर्शी के आठ प्रतिच्छेद बिन्दु एक वृत्त $x^2+y^2=a^2$ पर स्थित होगें।

(b) Prove that every real valued function which is differentiable at a point $a \in R$ is continuous at that point. Give an example to show that the converse of this result is not true.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक वास्तविक मानीय फलन जो कि बिन्दु $a \in R$ पर अवकलनीय है वह उस बिन्दु पर सतत भी होगा। एक उदाहरण दीजिए कि इस परिणाम का विलोम सत्य नहीं है।

37 (a) If a function f is continuous in closed interval $[a, b]$ and $c \in (a,b)$ such tha $f(c) < 0$, then prove that there exists a $\delta > 0$ such that $f(x) < 0 \, \forall x \in (c-\delta, c+\delta)$

यदि फलन f संवृत्त अन्तराल $[a, b]$ में सतत है तथा $c \in (a,b)$ एक ऐसा बिन्दु है कि $f(c) < 0$ तो सिद्ध कीजिए कि एक $\delta > 0$ का अस्तित्व होगा कि $f(x) < 0 \, \forall x \in (c-\delta, c+\delta)$.

(b) If $f(x) = (x-4)\log x$, then prove that the equation $x\log x = 4 - x$ is satisfied b at least one value of $x \in (1, 4)$.

यदि $f(x) = (x-4)\log x$, तो सिद्ध कीजिए कि समीकरण $x\log x = 4 - x$ कम से कम ए मान $x \in (1, 4)$ के लिए संतुष्ट होती है।

38 Prove that the equation $\sqrt{ax}+\sqrt{by}+\sqrt{cz}=0$ represents a cone which touches coordinate planes. Find the equation to the reciprocal cone.

सिद्ध कीजिये कि $\sqrt{ax}+\sqrt{by}+\sqrt{cz}=0$ एक शंकु को प्रदर्शित करता है जो निर्देशांक समतलों स्पर्श करता है। इसके व्युत्क्रम शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिये।

39 By the method of contour integration prove that :
परिरेखा समाकलन विधि से सिद्ध कीजिये कि .:

$$\int_0^\infty \frac{\cos mx}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi}{2a}e^{-ma},\ (m \geq 0).$$

20

[Contd...